Refinamento de Malha com Base na Convergência do Método de Elementos Finitos

Karla Melissa dos Santos Leandro[1], Flávia Gonçalves Fernandes[2], Samuel Wanberg Lourenço Nery[3], Marcos Napoleão Rabelo[4], Marco Paulo Guimarães[5],

[1]Departamento de Engenharia de Produção – Universidade Federal de Catalão (UFCAT)
Catalão – GO – Brasil

[2]Departamento de Ciências da Computação – Universidade Federal de Catalão (UFCAT)
Catalão – GO – Brasil

[3]Unidade Acadêmica Especial de Biotecnologia – Universidade Federal de Catalão (UFCAT)
Catalão – GO – Brasil

[4]Unidade Acadêmica Especial de Matemática e Tecnologia – Universidade Federal de Catalão (UFCAT)
Catalão – GO – Brasil

[5]Departamento de Engenharia de Produção – Universidade Federal de Catalão (UFCAT)
Catalão – GO – Brasil

{karlaufcat,flavia.fernandes92,samuelwanberg}@gmail.com, rabelo@dmat.ufpe.br

mp-gui@uol.com.br

Abstract. *Computational simulation is widely used to perform analyzes and improve the quality of products and projects in civil construction. Traditional methods, both structural analysis and design and fault analysis, are usually based on the Finite Element Method (MEF). In this perspective, this work has the objective to compare the accuracy of the finite element method and to investigate the dependence of the number of nodes and elements, the size and type of element of the mesh. After analysis of the results, it was observed that the number of nodes and elements contained in the mesh influences the quality of the research, making the work more sensitive to deformation of the beam, subjected to static or dynamic loads.*

Resumo. *A simulação computacional é amplamente utilizada para realizar análises e melhorar a qualidade dos produtos e projetos na construção civil. Os métodos tradicionais, tanto de análise e projeto estrutural, quanto de análise de falhas, são normalmente baseados no Método dos Elementos Finitos (MEF). Nessa perspectiva, este trabalho tem como objetivo comparar a precisão do método de elementos finitos e averiguar a dependência da quantidade de nós e elementos, o tamanho e o tipo de elemento da malha. Após análise dos resultados, foi observado que o número de nós e elementos contidos na malha influenciam na qualidade da pesquisa, tornando o trabalho mais sensível à deformação da viga, submetida aos carregamentos estáticos ou dinâmicos.*

1. Introdução

A mecânica dos sólidos é o ramo da mecânica que estuda o comportamento contínuo deformável dos sólidos. Neste contexto, a matéria é constituída por um meio contínuo de posições bem definidas, de modo que deformações, translações e rotações possam ser descritas e dissociadas para futuras análises [Zienkiewicz and Taylor 2005].

Assim, a mecânica dos sólidos utiliza tensores para descrever tensões, deformações e descreve as relações existentes entre estes dois estados [Magrab 2012]. Neste âmbito, é possível prever o comportamento do sólido sob a ação de forças de contato, gradientes de temperatura, campos gravitacionais, campos eletromagnéticos, entre outros agentes internos e externos [Georgoulis and Pryer 2018].

Este trabalho destaca o método dos elementos finitos, que consiste na seguinte teoria: a geometria submetida aos carregamentos e restrições é subdividida em pequenas partes, denominadas elementos, os quais representam o domínio contínuo do problema. A divisão da geometria em pequenos elementos permite resolver um problema complexo, subdividindo-o em problemas mais simples, o que possibilita ao computador realizar com eficiência estas tarefas [Beneš and Kruis 2018], [Hu et al. 2018]. Esta pesquisa tem como objetivo comparar a precisão do método dos elementos finitos e averiguar a dependência da quantidade de nós e elementos, o tamanho e o tipo de elemento da malha. Ou seja, confrontar se quanto menor for o tamanho e quanto maior for o número de nós e elementos em uma determinada malha, maior será precisão nos resultados da análise.

Nessa perspectiva, a simulação computacional é amplamente utilizada nas empresas para realizar análises e melhorar a qualidade dos produtos e projetos. Grande parte dessas análises, são realizadas por meio de softwares que utilizam (MEF), os quais possibilitam a obtenção de respostas para inúmeros problemas de engenharia [Duan and Ma 2018].

O presente trabalho foi estruturado da seguinte forma: na seção 2, são apresentados os conceitos básicos utilizados nesta pesquisa; na seção 3, são descritos trabalhos similares à esta pesquisa; a seção 4 relatou a metodologia proposta; na seção 5, os resultados foram analisados e discutidos; e, na seção 6, foram abordadas as conclusões da pesquisa.

2. Conceitos Básicos

O método de Galerkin é usado para resolver problemas em mecânica estrutural, dinâmica, fluxo de fluidos, estabilidade hidrodinâmica, transferência de massa, acústica, teoria de microondas. Este método está inserido como ferramenta básica teórica incluída para (MEF). Problemas governados por equações diferenciais ordinárias, equações diferenciais parciais e equações integrais são estudados pela formulação de Galerkin. Deste modo, problemas estáveis, instáveis e de autovalor mostraram-se aplicáveis para um tratamento usando o método de Galerkin[Fletcher 1984].

Em Elementos Finitos, devido à complexidade das estruturas, é comum a modelagem a partir de métodos numéricos, onde, a partir de um modelo numérico, obtém-se a formulação clássica da equação referente ao problema estudado. Em seguida, realiza-se a formulação integral e faz-se a aproximação pelo método de Galerkin e discretiza-se o domínio pelo método de elementos finitos [Rabelo et al. 2017].

Na formulação deste método, divide-se o intervalo da solução $([0, 1])$ em vários subintervalos $([x_i, x_i + 1])$e $i = 1$ a n. Considerando um subdomínio com dois nós, um em cada extremidade, como visto na Figura 1.

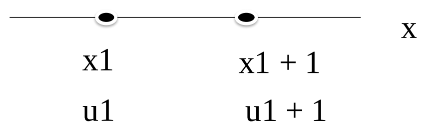

Figura 1. Intervalo de Soluções
Adaptado de [Bang and Kwon 2000]

Em cada nó, o valor de coordenada corresponde $(x_i;$ ou $x_{i+1})$ à variável nodal $(u_i;$ ou $u_{i+1})$ atribuída e ω equivale à função referente ao peso residual. Sendo assim, a função teste desconhecida é apresentada na equação 1. As equações 1 a 8 demonstram de maneira detalhada o processo de formulação do Método de Galerkin.

$$u_i = c_1 x_i + c_2 \tag{1}$$

$$\begin{cases} c_1 = \dfrac{u_{i+1} - u_i}{x_{i+1} - x_i} \\ c_2 = \dfrac{u_i + x_{i+1} - u_{i+1} x_i}{x_{i+1} - x_i} \end{cases} \tag{2}$$

$$u_{i+1} = c_1 x_{i+1} + c_2 \tag{3}$$

$$u = H_1(x) u_i + H_2(x) u_{i+1} \tag{4}$$

$$\begin{cases} H_1(x) = \dfrac{x_{i+1} - x}{h_i} \\ H_2(x) = \dfrac{x - x_i}{h_i} \\ h_i(x) = x_{i+1} - x_i \end{cases} \tag{5}$$

H_{1x} e H_{2x} são chamados de funções de forma linear e satisfazem a seguinte condição:

1.

$$\begin{cases} H_1(x_i) = H_2(x_{i+1}) = 1 \\ H_1(x_{i+1}) = H_2(x_{i+1}) = 0 \end{cases} \tag{6}$$

A formulação pode ser transformada em:

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(-\frac{d\omega}{dx}\frac{du}{dx} - \omega u + x\omega \right) dx + \left[\omega \frac{du}{dx} \right]_0^1 = 0 \tag{7}$$

Logo, obtém-se a formulação do Método de Galerkin:

$$-\int_{x_i}^{x_{i+1}}\left(\begin{Bmatrix}H_1'\\H_2'\end{Bmatrix}[H_1'H_2']+\begin{Bmatrix}H_1\\H_2\end{Bmatrix}[H_1H_2]\right)dx\begin{Bmatrix}u_i\\u_{i+1}\end{Bmatrix}+\int_{x_i}^{x_{i+1}}x\begin{Bmatrix}H_1\\H_2\end{Bmatrix}dx(8)$$

3. Trabalhos Relacionados

O método de elementos finitos pode ser aplicado na resolução e diagnóstico de problemas de análise estrutural por meio da obtenção de deslocamentos, deformações e tensões. Também permite representar diversos cenários e avaliar o desempenho de produtos com a aplicação de critérios de resistência, rigidez ou fadiga. Além disso, variações do método dos elementos finitos viabilizam a análise térmica, acústica, dinâmica, eletromagnética e de fluidos para casos mais simples de comportamento linear ou outros não-lineares, como quando há grandes deslocamentos ou contato entre partes de uma montagem [Lossouarn et al. 2018], [Burman et al. 2018].

A partir desses conceitos, são encontrados trabalhos na literatura que abordam em problemas de análise estrutural, tais como fratura, fadiga ou falhas em estruturas. Modelos matemáticos aplicados a vigas e placas também são amplamente aplicados em sistemas eletromecânicos. A dependência do comportamento elástico nas dimensões do corpo em microescala já foi experimentalmente observada em metais, ligas, polímeros e cristais. Além de utilizar a modelagem linear em numerosas obras, há a necessidade de estudar a não-linearidade, que ocorre em experimentos sobre características especiais de sistemas mecânicos [Krysko et al. 2017].

Em [Gupta et al. 2008], foi abordado o monitoramento online do dano de fadiga em estruturas de liga policristalina, baseado em análises do processamento dos sinais de sensores ultrassônicos. O método de monitoramento de danos baseia-se nos conceitos derivados da mecânica dos sólidos, dinâmica estatística e reconhecimento de padrões, e foi validado por experimentação laboratorial em tempo real em um aparelho de teste de danos por fadiga controlado por computador, que foi equipado com uma variedade de instrumentos de medição, incluindo um microscópio de viagem óptica e um detector de falhas ultrassônica.

4. Metodologia

Os elementos finitos são conectados entre si por pontos, os quais são denominados de nós ou pontos nodais. Ao conjunto de todos esses itens, elementos e nós, dá-se o nome de malha [Hedayat et al. 2017]. Na representação da Figura 2, tem-se uma viga engastada medindo 60 cm de comprimento especificado na variável L na Figura 2, 20 cm de largura estabelecido como b, e 1 cm de espessura identificado na variável h. Para obter os deslocamentos dos elementos discretizados na viga, foram criadas duas malhas para a verificação da hipótese de que a quantidade de nós e elementos de uma malha, melhora consideravelmente a solução do Método de Elementos Finitos. Para esta finalidade, foi criada uma malha com 81 nós e 128 elementos, conforme pode ser visto na Figura 3, e a segunda constituída de 289 nós e 512 elementos, de acordo com a Figura 4.

Em função dessas subdivisões da geometria, estas malhas são triangulares e contínua. Segundo [Keith et al. 2017], equações matemáticas que regem os comporta-

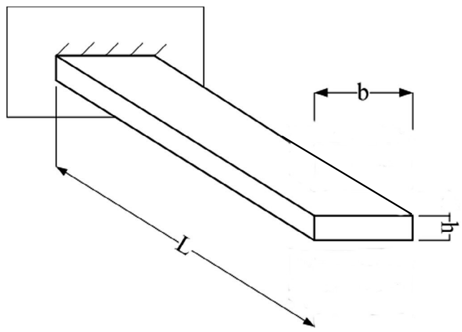

Figura 2. Viga Analisada
Adaptado de [Bang and Kwon 2000]

mentos físicos não são resolvidas de maneira exata, mas de forma aproximada por este método numérico.

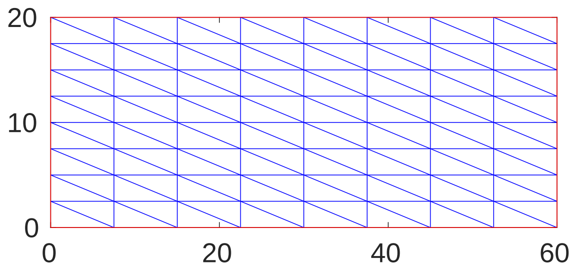

Figura 3. Malha 1
Os Autores

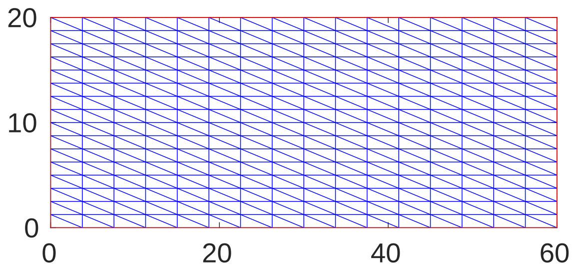

Figura 4. Malha 2
Os Autores

5. Resultados e Discussões

Ao determinar o planejamento da malha de controle, foram realizados testes para identificar se a quantidade de nós e elementos influenciaria na qualidade do método e, consequentemente, nos resultados. Com esta finalidade, testaram-se duas espessuras de malhas geradas pelo software Octave.

Neste trabalho, foi utilizado o método de Galerkin para resolver a equação diferencial descrita pelo modelo de viga de Euler-Bernoulli, analisando a deflexão desta viga sujeita a carregamentos estáticos ou dinâmicos, composta de uma equação diferencial parcial linear de quarta ordem. Com este intuito, foram testadas duas malhas de tamanhos diversificados, como visto nas Figuras 3 e 4. Notou-se que quanto maior o número de nós e elementos, mais sensível o método se torna a pequenas flutuações de deslocamentos. Para explicitar esta sensibilidade em gráficos, foram selecionados ao acaso dois nós, representados como nó 8 e nó 9, mostrados na Figura 5, e, ao plotar as soluções advindas do Método de Elementos Finitos, foi identificado que, inicialmente, os valores se comportam praticamente contrários e, com o passar do tempo, esses valores aproximam-se e tornam-se semelhantes, em um curto espaço de tempo.

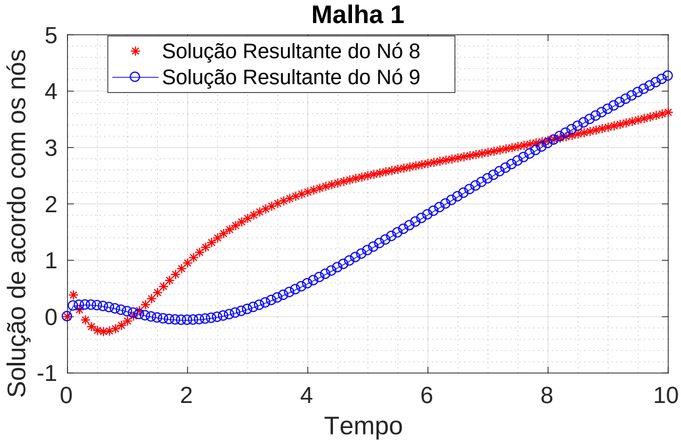

Figura 5. Resultado Referente a Malha 1
Os Autores

Na segunda malha, foi obtido o gráfico apresentado na Figura 6. Assim, notou-se que os nós selecionados comportam-se praticamente como iguais em modo numérico. Desta forma, uma malha com maior quantidade de nós consegue maior equilíbrio de restrições, fornecendo maior entendimento do sistema compatível com o modelo de viga de Euler-Bernoulli.

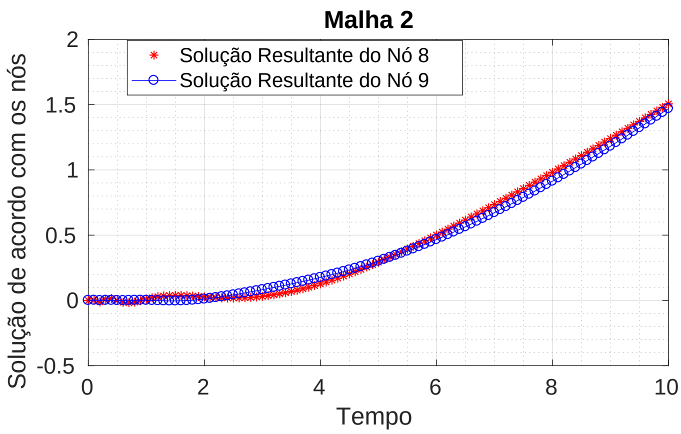

Figura 6. Resultado Referente a Malha 2
Os Autores

6. Conclusões

A partir da mecânica dos sólidos, é possível prever o comportamento do sólido sob a ação de forças de contato, gradientes de temperatura, campos gravitacionais, campos eletromagnéticos entre outros agentes internos e externos. Dessa forma, ela se mostra uma ferramenta fundamental para engenheiros, na concepção de máquinas, edificações e outros produtos; para a geologia e para muitos ramos da física, tal como ciência dos materiais.

Além disso, observou-se que o método pode ser aplicado na resolução e diagnóstico de problemas de análise estrutural por meio da obtenção de deslocamentos, deformações e tensões, mas também permite representar diversos cenários e avaliar o desempenho de produtos com a aplicação de critérios de resistência, rigidez ou fadiga. Além disso, variações do método dos elementos finitos viabilizam a análise térmica, acústica, dinâmica, eletromagnética e de fluidos para casos mais simples de comportamento linear ou outros não-lineares, como quando há grandes deslocamentos ou contato entre partes de uma montagem.

Em virtude do que foi apresentado, foi alcançado o objetivo inicial e percebe-se que quanto maior a quantidade de nós na malha, maior será o equilíbrio do modelo de viga por análise de Euler-Bernoulli. Também se verifica que grande parte dessas análises são realizadas por meio de softwares que utilizam o método dos elementos finitos, os quais possibilitam a obtenção de respostas para inúmeros problemas de engenharia.

Referências

Bang, H. and Kwon, Y. W. (2000). *The finite element method using MATLAB*. CRC press.

Beneš, Š. and Kruis, J. (2018). Singular value decomposition used for compression of results from the finite element method. *Advances in Engineering Software*, 117:8–17.

Burman, E., Elfverson, D., Hansbo, P., Larson, M. G., and Larsson, K. (2018). Shape optimization using the cut finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 328:242–261.

Duan, H. and Ma, J. (2018). Continuous finite element methods for reissner-mindlin plate problem. *Acta Mathematica Scientia*, 38(2):450 – 470.

Fletcher, C. A. (1984). Computational galerkin methods. In *Computational Galerkin Methods*, pages 72–85. Springer.

Georgoulis, E. H. and Pryer, T. (2018). Recovered finite element methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*.

Gupta, S., Singh, D. S., and Ray, A. (2008). Statistical pattern analysis of ultrasonic signals for fatigue damage detection in mechanical structures. *NDT & E International*, 41(7):491–500.

Hedayat, A. A., Afzadi, E. A., and Iranpour, A. (2017). Prediction of the bolt fracture in shear using finite element method. In *Structures*, volume 12, pages 188–210. Elsevier.

Hu, G., Xie, H., and Xu, F. (2018). A multilevel correction adaptive element method for kohn–sham equation. *Journal of Computational Physics*, 355:436–449.

Keith, B., Petrides, S., Fuentes, F., and Demkowicz, L. (2017). Discrete least-squares finite element methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 327:226–255.

Krysko, A., Awrejcewicz, J., Zhigalov, M., Pavlov, S., and Krysko, V. (2017). Nonlinear behaviour of different flexible size-dependent beams models based on the modified couple stress theory. part 1: Governing equations and static analysis of flexible beams. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 93:96–105.

Lossouarn, B., Aucejo, M., and Deü, J.-F. (2018). Electromechanical wave finite element method for interconnected piezoelectric waveguides. *Computers & Structures*, 199:46–56.

Magrab, E. B. (2012). *Vibrations of elastic systems: With applications to MEMS and NEMS*, volume 184. Springer Science & Business Media.

Rabelo, M., Silva, L., Borges, R., GonÃ§alves, R., and Henrique, M. (2017). Computational and numerical analysis of a nonlinear mechanical system with bounded delay. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 91:36 – 57.

Zienkiewicz, O. C. and Taylor, R. L. (2005). *The finite element method for solid and structural mechanics*. Elsevier.